

Tema 07:

Estudio general del cálculo en agotamiento bajo solicitaciones normales

CONTENIDO:

1.	Introducción	2
2.	Hipótesis básicas	2
3.	Dominios de deformación	3
3.1	Dominio 1:	5
3.2	Dominio 2:.....	5
3.3	Dominio 3:	5
3.4	Dominio 4:	7
3.5	Dominio 4a:.....	7
3.6	Dominio 5:	8
4.	Ecuaciones de compatibilidad.	8
4.1	Tracción simple o compuesta:	8
4.2	Flexión simple o compuesta:	9
4.3	Compresión simple o compuesta:	9
5.	Tensiones en las armaduras en los distintos dominios	10
5.1	Dominio 1.....	10
5.2	Dominio 2.....	11
5.3	Dominio 3.....	13
5.4	Dominio 4.....	14
5.5	Dominio 4-a.....	15
5.6	Dominio 5.....	16
6.	Ecuaciones de equilibrio	22
6.1	Tracción simple o compuesta.	24
6.2	Flexión simple o compuesta.	25
6.3	Compresión simple o compuesta.	25
7.	Esfuerzos soportados por el hormigón.....	26
7.1	Diagrama rectangular.....	26
8.	Ecuaciones de equilibrio y compatibilidad adimensionales. secciones RECTANGULARES. diagrama RECTANGULAR.	27
8.1	Flexión	28
8.1.1	Ecuaciones de equilibrio	28
8.1.2	Ecuaciones de compatibilidad.	30
8.2	Compresión	30
8.2.1	Ecuaciones de equilibrio	30
8.2.2	Ecuaciones de compatibilidad.	32

1. INTRODUCCIÓN

En el Tema 6 se establecieron las bases para el cálculo en agotamiento de las estructuras de hormigón armado. El procedimiento descrito tiene por objeto comprobar que sometida la estructura a las acciones de cálculo, es decir las acciones características multiplicadas por un coeficiente de mayoración γ_f , no se alcanza ninguna situación límite (estado límite), en el supuesto de que tanto el acero como el hormigón tuviesen como resistencias últimas las minoradas o de cálculo, obtenidas dividiendo las resistencias características por un coeficiente de minoración γ_m (para el hormigón este coeficiente es γ_c y para el acero γ_s).

En este tema se establecen las consideraciones generales para el cálculo de secciones de hormigón armado sometidas a solicitaciones normales en el estado límite último de agotamiento resistente. Tal como se comentó en el tema anterior las solicitaciones normales son aquellas que producen estados tensionales perpendiculares a las secciones rectas de las piezas, originadas en general, por un momento flector y un esfuerzo normal referidos al centro de gravedad de la sección de hormigón. Las tensiones tangenciales originadas por esfuerzo cortante y momento torsor serán estudiadas más adelante.

Como se vio en el tema anterior, una sección de hormigón armado sometida a solicitaciones normales alcanza el estado límite de agotamiento cuando uno o los dos materiales alcanzan el agotamiento. Esto puede suceder mediante tres formas diferentes:

- Agotamiento del acero:
 1. Por exceso de deformación plástica del acero.
- Agotamiento del hormigón:
 2. Por aplastamiento del hormigón en flexión.
 3. Por aplastamiento del hormigón en compresión.

Estos estados límites se alcanzan en las siguientes situaciones:

1. En elementos sometidos a tracción o flexión con cuantías pequeñas, el agotamiento se produce cuando las armaduras en tracción alcanzan una deformación plástica elevada, que se fija en un 10‰. Teniendo en cuenta que el acero rompe con deformaciones mucho mayores, la rotura de la pieza ocurre finalmente por aplastamiento del hormigón en la zona comprimida, cuya altura se reduce cada vez más al aumentar la abertura de las fisuras; sin embargo el origen de la rotura reside en la excesiva deformación del acero.
2. En elementos sometidos a flexión con cuantías medias o grandes, el agotamiento se produce por aplastamiento del hormigón comprimido, al alcanzar éste, en su fibra más comprimida, una deformación que se fija en un 3,5‰.
3. En elementos sometidos a compresión simple o compuesta, el agotamiento se produce por aplastamiento del hormigón comprimido, con deformaciones, en la fibra más comprimida, que se fijan del 2‰ en compresión simple, y del 2 al 3,5‰ en compresión compuesta, siendo en éste último caso la deformación de la fibra situada a una profundidad de $\frac{3}{7}h$ (siendo h el canto de la sección de hormigón) igual al 2‰.

El método de cálculo propuesto por la Instrucción española para el estudio de las secciones de hormigón armado, en las distintas formas de agotamiento, cubre todas las solicitaciones normales. Las hipótesis básicas de este método se describen a continuación.

2. HIPÓTESIS BÁSICAS

El dimensionamiento de secciones de forma cualquiera sometidas a solicitaciones normales, en el estado límite último, se efectúa con las siguientes hipótesis:

- 1.- Hipótesis de Bernouilli. Las secciones planas de hormigón, se mantienen planas después de la deformación, siempre que $\frac{\ell}{h} > 2$, siendo ℓ la distancia entre puntos de momento nulo y h el canto de la sección.

De esta primera hipótesis se deduce que las deformaciones de las fibras de una sección varían proporcionalmente a su distancia al eje neutro. El diagrama de deformación es lineal.

- 2.- Bajo cualquier solicitación las barras de acero tienen la misma deformación que el hormigón que las envuelve. Esta hipótesis expresa la vinculación total entre el acero y el hormigón.
- 3.- No se tiene en cuenta para el cálculo la resistencia a tracción del hormigón, es decir que las zonas en el hormigón en las que aparecen tracciones no se consideran activas.
- 4.- Los diagramas tensión-deformación del acero y del hormigón serán los indicados en los apartados 5 y 7.
- 5.- En el agotamiento, los dominios de deformación relativos al hormigón y al acero, según las distintas solicitaciones, son los indicados en el apartado 3.
- 6.- Se aplicarán a las secciones las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y momentos, igualando la resultante de las tensiones del hormigón y del acero con la solicitación actuante.

3. DOMINIOS DE DEFORMACIÓN

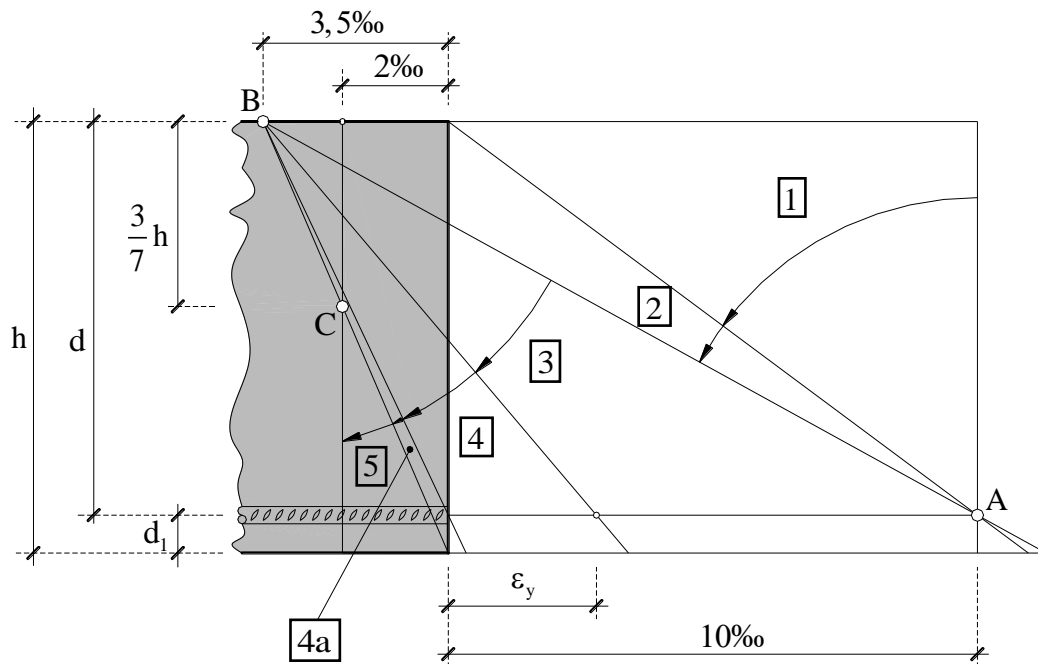
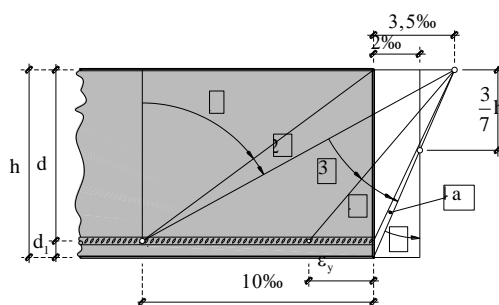
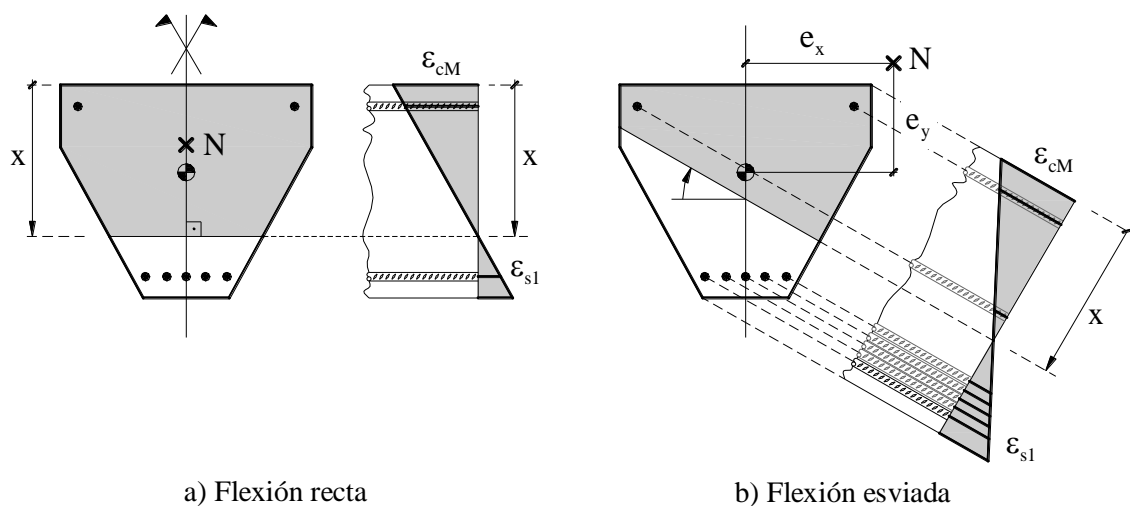


Fig 3-1. Dominios de deformación.

Una sección de hormigón armado se encontrará en un estado límite último cuando el diagrama de deformaciones de la misma alcance alguno de los valores de agotamiento dados en el apartado 1, y por lo tanto, estos diagramas de deformación últimos de las secciones, según la naturaleza de la solicitación, estarán situados en alguna de las regiones indicadas en la Fig 3-1, que reciben el nombre de dominios de deformación¹.

¹ En la Fig 3-1 se han representado los dominios de deformación con el criterio de signos que en nuestra opinión es el más intuitivo para el alumno: las deformaciones de compresión penetran en la sección y las de tracción salen de la misma. No obstante hay que resaltar que es costumbre en la bibliografía sobre estructuras de hormigón, e incluso en la Instrucción EHE, emplear el criterio signos contrario. Según este criterio de signos, los dominios de deformación toman el aspecto que se muestra en la siguiente figura.

En flexión recta el plano de deformación de la sección queda conocido en general cuando se conozcan dos datos del mismo (dos deformaciones, una deformación y la profundidad de la fibra neutra, ...). Como en el agotamiento al menos una deformación es conocida (la de agotamiento del hormigón, $\varepsilon_{cM} = \varepsilon_{cu}$ o la del acero más traccionado, $\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{su}$) resulta que el **diagrama de deformación último** de la sección quedará definido únicamente por un único parámetro, que es costumbre que sea la profundidad de la fibra neutra, x . Los dominios de deformación quedarán definidos por los valores de la profundidad de la fibra neutra de los diagramas de deformación extremos del dominio, x_1 y x_2 . Para la flexión esviada es necesario introducir un nuevo parámetro que suele ser el ángulo, β , que forma el eje neutro con una dirección dada.



3.1 Dominio 1:

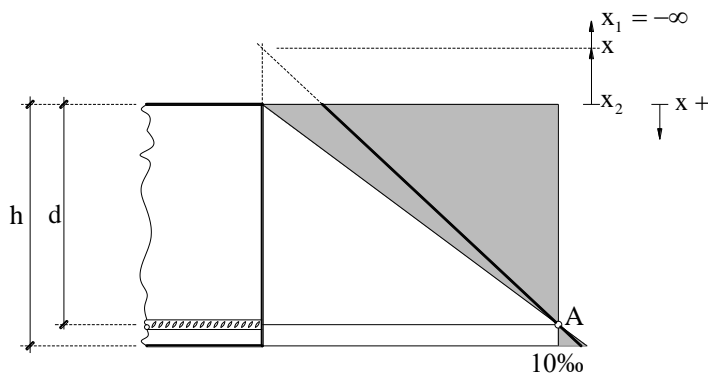


Fig. 3-2. Dominio 1.

Tracción simple o compuesta en donde toda la sección está en tracción. Las rectas de deformación giran alrededor del punto A correspondiente a un alargamiento del acero más traccionado del 10‰.

La profundidad de la fibra neutra varía entre $x_1 = -\infty$ (diagrama de deformación correspondiente a tracción simple) y $x_2 = 0$.

La deformación de la armadura más traccionada es $\varepsilon_{sl} = \varepsilon_{su} = 10\text{‰}$, y el agotamiento se produce por exceso de deformación plástica del acero.

3.2 Dominio 2:

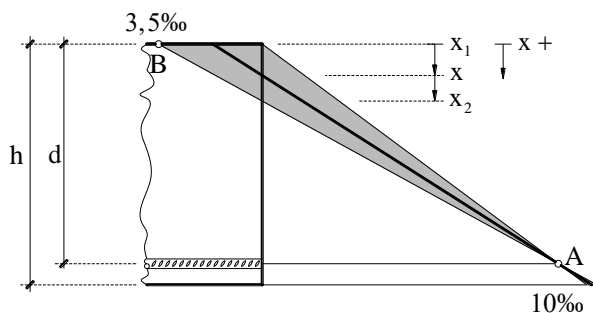


Fig. 3-3. Dominio 2.

Flexión simple o compuesta en donde el hormigón no alcanza la deformación de rotura por flexión. Las rectas de deformación giran alrededor del punto A, hasta que la fibra más comprimida del hormigón alcance la deformación de rotura por flexión ($\varepsilon_{cu} = 3,5\text{‰}$), momento en el cual se agotan simultáneamente el hormigón y el acero.

En este dominio el agotamiento se produce por deformación plástica excesiva del acero ($\varepsilon_{sl} = \varepsilon_{su} = 10\text{‰}$).

La profundidad de la fibra neutra varía entre $x_1 = 0$ y x_2 . El valor de x_2 lo determinamos aplicando la ecuación de compatibilidad de deformaciones:

$$\frac{0,0035}{x_2} = \frac{0,010}{d - x_2} \Rightarrow x_2 = 0,259d$$

3.3 Dominio 3:

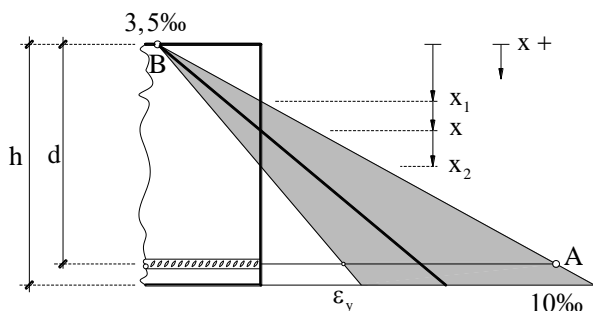


Fig. 3-4. Dominio 3.

Flexión simple o compuesta en donde las rectas de deformación giran alrededor del punto B correspondiente a la deformación de rotura por flexión del hormigón $\varepsilon_{cu} = 3,5\text{‰}$. El alargamiento de la armadura de tracción está comprendido entre el 10‰ y ε_y , siendo ε_y el alargamiento correspondiente al límite elástico de cálculo del acero.

El agotamiento en este dominio se produce por aplastamiento del hormigón en flexión.

Este es el dominio más interesante para el dimensionamiento a flexión de secciones de hormigón, ya que se aprovechan al máximo las capacidades resistentes de los dos materiales:

- Se agota la resistencia del hormigón a flexión, al alcanzar la fibra más comprimida del mismo la deformación de rotura a flexión $\varepsilon_{cu}=3,5\%$.
- Aunque el acero no está agotado, ya que no alcanza su deformación máxima admisible $\varepsilon_{su}=10\%$, éste se encuentra trabajando con su resistencia de cálculo, f_{yd} .

El valor de ε_y depende del tipo de acero y del coeficiente de seguridad del mismo, γ_s , y es igual a:

$$\varepsilon_y = \frac{f_{yd}}{E_s}$$

Los valores de ε_y para los distintos tipos de aceros y coeficientes de seguridad se recogen en la Tabla 3-1.

		$\gamma_s = 1,00$	$\gamma_s = 1,15$
Aceros de Dureza Natural	B 400S	0,0020	0,0017
	B 500S	0,0025	0,0022
Tabla 3-1. ε_y , alargamiento de cálculo correspondiente al límite elástico			

La profundidad de la fibra neutra varía entre $x_1=0,259$ y $x_2=x_{lim}$. El valor de x_{lim} depende del valor de ε_y , y por lo tanto del tipo de acero y del coeficiente de seguridad del mismo, γ_s , y lo determinamos aplicando la ecuación de compatibilidad de deformaciones:

$$\frac{0,0035}{x_{lim}} = \frac{\varepsilon_y}{d - x_{lim}} \Rightarrow x_{lim} = \frac{d}{1 + \frac{\varepsilon_y}{0,0035}}$$

Sustituyendo en esta expresión los valores de ε_y obtenemos:

$$x_{lim} = \frac{d}{1 + 1,43 \cdot 10^{-3} \cdot f_{yd}}$$

donde f_{yd} es la resistencia de cálculo del acero en $\frac{N}{mm^2}$.

Los valores de x_{lim} para los distintos tipos de acero y coeficientes de seguridad se muestran en la Tabla 3-2.

		$\gamma_s = 1,00$	$\gamma_s = 1,15$
Aceros de Dureza Natural	B 400S	0,636	0,668
	B 500S	0,583	0,617
Tabla 3-2. $\frac{x_{lim}}{d}$, Profundidad límite de la fibra neutra en el dominio 3			

² Esta expresión de ε_y es válida para aceros con escalón de cedencia, como los aceros de dureza natural. Para aquellos que no presentan este escalón, como los aceros estirados en frío (en la actualidad este tipo de acero no se fabrica en España), la expresión de ε_y es:

$$\varepsilon_y = 0,002 + \frac{f_{yd}}{E_s}$$

3.4 Dominio 4:

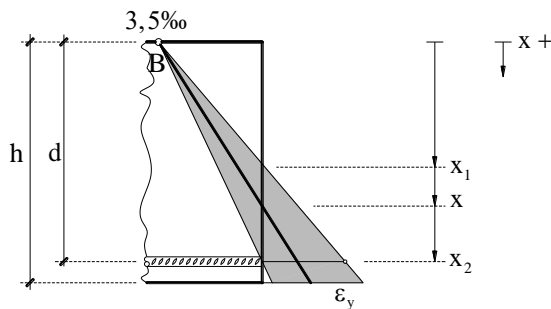


Fig. 3-5. Dominio 4.

Flexión simple o compuesta en donde las rectas de deformación giran alrededor del punto B, correspondiente a la deformación de rotura por flexión del hormigón $\varepsilon_{cu}=3,5\text{‰}$. El alargamiento de la armadura de tracción está comprendido entre ε_y y 0, y por lo tanto la tensión en este acero es inferior a su resistencia de cálculo, f_{yd} .

El agotamiento en este dominio se produce por aplastamiento del hormigón en flexión.

La profundidad de la fibra neutra varía entre $x_1=x_{lim}$ y $x_2=d$.

3.5 Dominio 4a:

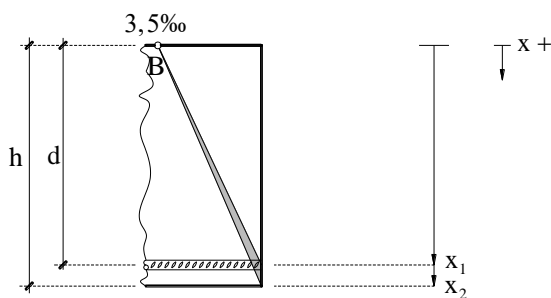


Fig. 3-6. Dominio 4a.

Compresión compuesta³ en donde todas las armaduras están comprimidas y existe una pequeña zona de hormigón en tracción. Las rectas de deformación giran alrededor del punto B.

El agotamiento en este dominio se produce por aplastamiento del hormigón en flexión.

La profundidad de la fibra neutra varía entre $x_1=d$ y $x_2=h$.

³ Según la definición dada en el tema anterior, este dominio NO corresponde a compresión compuesta, ya que la sección NO se encuentra totalmente comprimida. No obstante, como la zona sin comprimir es únicamente la zona del recubrimiento inferior, y en ella no se consideran tracciones, resulta que todas las tensiones que se producen en la sección son de compresión, y por lo tanto consideraremos a este dominio de compresión compuesta. Por lo tanto diremos que una solicitación es de compresión si ésta provoca que las dos armaduras (A_{s1} y A_{s2}) se encuentren comprimidas; es decir, cuando la sección se agote en el dominio 4a ó 5.

3.6 Dominio 5:

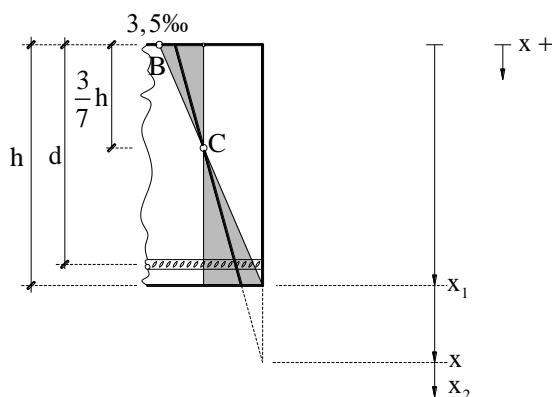


Fig. 3-7. Dominio 5.

compatibilidad de deformaciones:

$$\frac{0,0035 - 0,002}{C} = \frac{0,0035}{h} \Rightarrow C = \frac{3}{7}h$$

Compresión simple o compuesta en donde ambos materiales trabajan a compresión. Las rectas de deformación giran alrededor del punto C definido por la recta correspondiente a la deformación de rotura del hormigón por compresión simple, $\varepsilon_{cu}=2\text{‰}$, y la de la deformación límite del dominio 4a.

El agotamiento en este dominio se produce por aplastamiento del hormigón en compresión.

La profundidad de la fibra neutra varía entre $x_1=h$ y $x_2=\infty$.

La profundidad del punto C la determinamos aplicando la ecuación de

4. ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD.

Como se comentó en el apartado 3 al hablar de los dominios de deformación, el diagrama de deformación en el agotamiento es función de un único parámetro, para el cual se toma, con carácter general, la profundidad del eje neutro⁴. Esto quiere decir, que las deformaciones de las distintas fibras de la sección no son independientes. Las ecuaciones que establecen estas dependencias, o dicho de otro modo, las ecuaciones que establecen las deformaciones de las distintas fibras (en particular ε_{cm} , ε_{s2} y ε_{s1}) en función de la profundidad de la fibra neutra, se denominan ecuaciones de compatibilidad de deformaciones.

4.1 Tracción simple o compuesta:

$$\frac{\varepsilon_{s2}}{d_2 - x} = \frac{\varepsilon_{s1}}{d - x}$$

➤ $-\infty < x \leq 0$ (Dom 1) $\Rightarrow \varepsilon_{s1} = \varepsilon_{su} = 0,010$

$$\varepsilon_{s2} = 0,010 \frac{d_2 - x}{d - x}$$

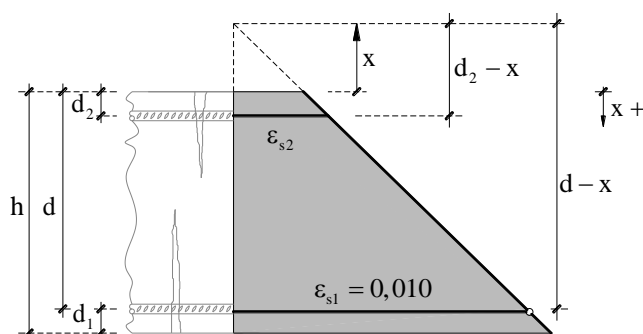


Fig. 4-9

⁴ Como se ha comentado anteriormente, en el caso de flexión esviada es necesario introducir otro parámetro, que con carácter general se toma β , ángulo de inclinación del eje neutro con respecto a una dirección dada. En este caso las expresiones que se deducen en este apartado son igualmente válidas, pero para un determinado valor de β . Este parámetro interviene en las ecuaciones deducidas de forma implícitas a través de los datos geométricos, h , d , d_1 y d_2 , que son función de β .

⁵ Téngase presente que el valor de la profundidad del eje neutro, x , en tracción, es negativo ($x < 0$).

4.2 Flexión simple o compuesta:

$$\frac{\varepsilon_{cM}}{x} = \frac{\varepsilon_{s2}}{x - d_2} = \frac{\varepsilon_{s1}}{d - x}$$

- $0 \leq x \leq 0,259 \cdot d$ (Dom 2) $\Rightarrow \varepsilon_{s1} = \varepsilon_{su} = 0,010$

$$\varepsilon_{s2} = 0,010 \frac{x - d_2}{d - x}$$

$$\varepsilon_{cM} = 0,010 \frac{x}{d - x}$$

- $0,259 \cdot d \leq x \leq d$ (Dom 3 y 4) $\Rightarrow \varepsilon_{cM} = \varepsilon_{cu} = 0,0035$

$$\varepsilon_{s2} = 0,0035 \frac{x - d_2}{x}$$

$$\varepsilon_{s1} = 0,0035 \frac{d - x}{x} \quad \text{siendo} \begin{cases} \varepsilon_{s1} \geq \varepsilon_y & \text{para } x \leq x_{\text{lim}} \text{ (Dom. 3)} \\ \varepsilon_{s1} < \varepsilon_y & \text{para } x > x_{\text{lim}} \text{ (Dom. 4)} \end{cases}$$

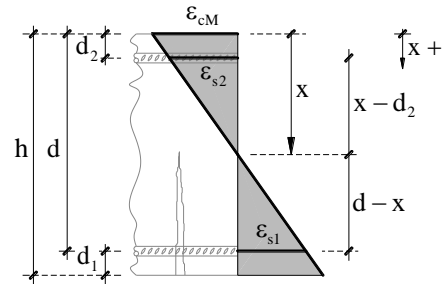


Fig. 4-10

4.3 Compresión simple o compuesta:

$$\frac{\varepsilon_{cM}}{x} = \frac{\varepsilon_{s2}}{x - d_2} = \frac{\varepsilon_{cC}}{x - \frac{3}{7}h} = \frac{\varepsilon_{s1}}{x - d}$$

- $d \leq x \leq h$ (Dom 4a) $\Rightarrow \varepsilon_{cM} = \varepsilon_{cu} = 0,0035$

$$\varepsilon_{s2} = 0,0035 \frac{x - d_2}{x}$$

$$\varepsilon_{s1} = 0,0035 \frac{x - d}{x}$$

- $h \leq x < \infty$ (Dom 5) $\Rightarrow \varepsilon_{cC} = \varepsilon_{cu} = 0,002$

$$\varepsilon_{s2} = 0,002 \frac{x - d_2}{x - \frac{3}{7}h}$$

$$\varepsilon_{s1} = 0,002 \frac{x - d}{x - \frac{3}{7}h}$$

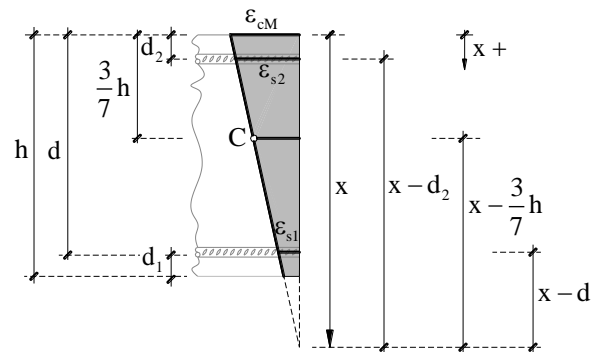


Fig. 4-11

Conocidas las deformaciones ε_{cM} , ε_{s1} y ε_{s2} pueden obtenerse las tensiones correspondientes con los diagramas tensión-deformación de ambos materiales (ecuaciones de comportamiento).

5. TENSIONES EN LAS ARMADURAS EN LOS DISTINTOS DOMINIOS

En el apartado anterior hemos determinado las deformaciones de las distintas fibras de la sección, para un determinado plano de deformación de agotamiento, caracterizado por el valor de la profundidad de su fibra neutra. En este apartado vamos a determinar las tensiones que provocan en las armaduras estas deformaciones, que serán igualmente función de la profundidad de la fibra neutra, para lo cual utilizaremos como diagrama tensión-deformación del acero, el definido en el apartado 6.3.6 y que se representa en la Fig. 5-1. Según este diagrama las tensiones en el acero serán:

$$\sigma_s = E_s \cdot \varepsilon_s \quad \text{si } \varepsilon_s \leq \varepsilon_y$$

$$\sigma_s = f_{yd} \quad \text{si } \varepsilon_s > \varepsilon_y$$

y por lo tanto, basta con multiplicar las deformaciones obtenidas en el apartado anterior por el módulo de

elasticidad del acero, $E_s = 2 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, para obtener

las tensiones, siempre y cuando las deformaciones sean inferiores a las correspondientes al límite elástico. En caso contrario las tensiones en el acero coincidirán con el límite elástico del mismo.

A partir de estas tensiones es cómodo obtener el valor de la tensión adimensional, ρ^6 , dividiendo la tensión por el límite elástico de acero:

$$\rho = \frac{\sigma_s}{f_{yd}}$$

En las Fig. 5-8 se han representado las deformaciones y tensiones adimensionales de las armaduras superior e inferior en función de la profundidad de la fibra neutra para los dos tipos de acero (B 400S y B 500S). Con objeto de realizar una representación continua se ha considerado para la armadura inferior el signo positivo cuando ésta trabaja a tracción y para la armadura superior cuando ésta trabaja a compresión. Sin embargo, las expresiones analíticas de estas mismas variables se han deducido todas con signo positivo.

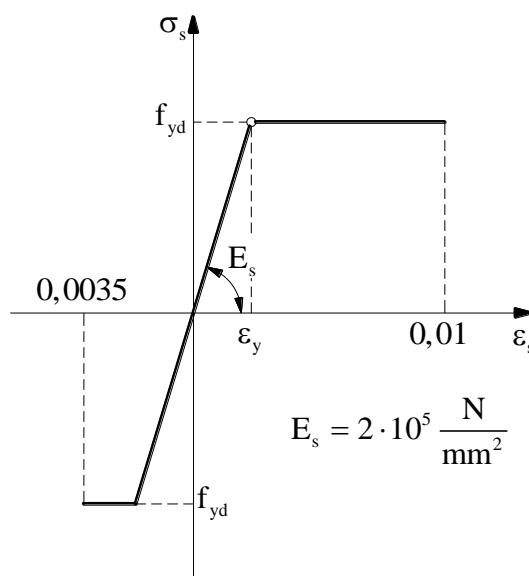


Fig. 5-1. Diagrama de cálculo tensión-deformación del acero.

5.1 Dominio 1

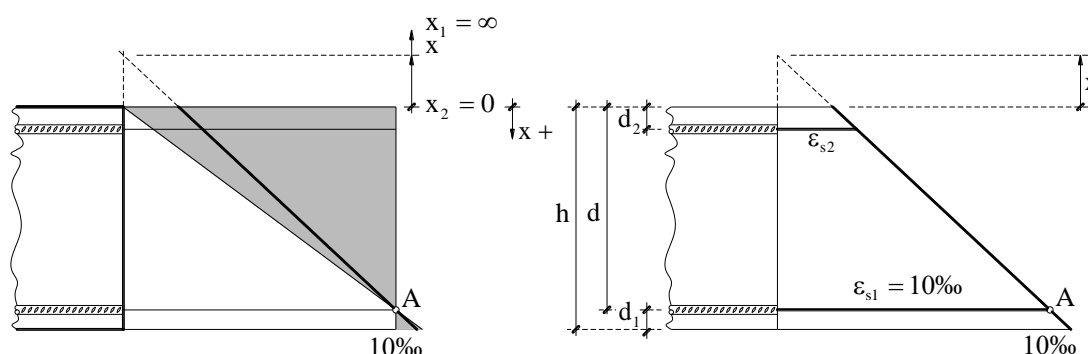


Fig. 5-2

⁶ Como siempre se utilizará el subíndice 2 para representar la correspondiente variable asociada a la armadura superior (ρ_2) y el 1 para la inferior (ρ_1).

- En todo este dominio la deformación de la armadura inferior o más traccionada es $\varepsilon_{s1} = 0,01 > \varepsilon_y$, por lo que ésta trabaja en todo él a su límite elástico, $\sigma_{s1} = f_{yd}$, y por lo tanto $\rho_1 = 1$.
- La deformación de la armadura menos traccionada es para $x = -\infty$ igual a $\varepsilon_{s2} = 10\text{‰}$ (a tracción) y al aumentar la profundidad de la fibra neutra esta deformación disminuye. La tensión adimensional será:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{s2} &= 0,01 \frac{d_2 - x}{d - x} \\ \rho_2 &= \frac{\sigma_{s2}}{f_{yd}} = \frac{E_s \cdot \varepsilon_{s2}}{f_{yd}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \rho_2 = \frac{2.000}{f_{yd}} \frac{d_2 - x}{d - x}^7$$

El valor de ρ_2 es inicialmente igual a 1 (según el criterio de signos adoptado en la representación de la Fig. 5-8, es $\rho_2 = -1$, ya que ésta trabaja a tracción) y se mantiene constante hasta que se alcance un valor de la profundidad de la fibra neutra $x = x_{2,\text{inf}}$, para la cual se hace $\varepsilon_{s2} = \varepsilon_y$. Para valores de la profundidad de la fibra neutra $x > x_{2,\text{inf}}$ se tendrá $\varepsilon_{s2} < \varepsilon_y$ y por lo tanto $\rho_2 < 1$.

El valor de x para el que se alcanza el límite elástico de la armadura menos traccionada; es decir $\varepsilon_{s2} = \varepsilon_y$ ó $\rho_2 = 1$, se obtiene sin más que hacer en la expresión de ρ_2 en función de x , $\rho_2 = 1$:

$$\frac{x_{2,\text{inf}}}{d} = \frac{1 - \frac{2000}{f_{yd}} \frac{d_2}{d}}{1 - \frac{2000}{f_{yd}}}$$

Los valores de $x_{2,\text{inf}}$, para los distintos tipos de acero y recubrimientos normales, son los que se muestran en la Tabla 5-1

d_2/d	B 400S		B 500S	
	$\gamma_s=1,15$	$\gamma_s=1,00$	$\gamma_s=1,15$	$\gamma_s=1,00$
0,05	-0,150	-0,188	-0,214	-0,267
0,10	-0,089	-0,125	-0,150	-0,200
0,15	-0,029	-0,063	-0,086	-0,133

Tabla 5-1. $x_{2,\text{inf}}/d$: Valores de x para los que se alcanza $\rho_2=1$

5.2 Dominio 2

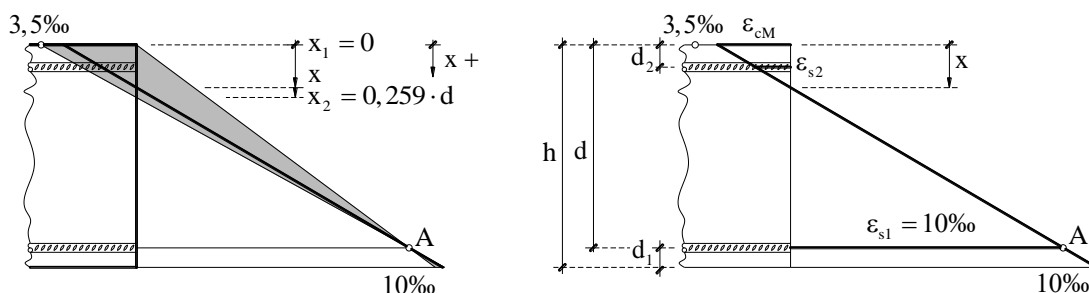


Fig. 5-3

⁷ Recordamos que las expresiones analíticas de ε y ρ las estamos deduciendo con signo positivo, tanto si la armadura trabaja a tracción como a compresión. Únicamente para la representación de estas variables en la Fig. 5-8 adoptamos el criterio de signos comentado al principio de este apartado.

- Al igual que en el dominio 1, la deformación de la armadura de tracción es $\varepsilon_{s1} = 0,01$, por lo que ésta trabaja a su límite elástico, $\sigma_{s1} = f_{yd}$, y por lo tanto $\rho_1 = 1$.
- Inicialmente, para $x = 0$, la armadura superior se encuentra traccionada con un valor de la deformación $\varepsilon_{s2} < \varepsilon_y$ y por lo tanto $\rho_2 < 1$. Al aumentar la profundidad de la fibra neutra la deformación de la armadura aumenta. La tensión adimensional será:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{s2} &= 0,01 \frac{x - d_2}{d - x} \\ \rho_2 &= \frac{\sigma_{s2}}{f_{yd}} = \frac{E_s \cdot \varepsilon_{s2}}{f_{yd}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \rho_2 = \frac{2.000}{f_{yd}} \frac{x - d_2}{d - x}$$

El valor de x , que denotaremos por x^* , para el que se alcanza el límite elástico de la armadura de compresión: es decir $\varepsilon_{s2} = \varepsilon_y$ ó $\rho_2 = 1$, se obtiene sin más que hacer en la expresión de ρ_2 en función de x , $\rho_2 = 1$:

$$\frac{x^*}{d} = \frac{1 + \frac{2.000}{f_{yd}} \frac{d_2}{d}}{1 + \frac{2.000}{f_{yd}}}$$

Los valores de x^* , para los distintos tipos de acero y recubrimientos normales, son los que se muestran en la Tabla 5-2. En las casillas de la tabla en color oscuro se han obtenidos valores de x correspondientes al dominio 3, por lo tanto son situaciones en los que el valor de x^* no se alcanza en el dominio 2, y por lo tanto los valores numéricos obtenidos no son correctos.

	B 400S		B 500S	
d_2/d	$\gamma_s=1,15$	$\gamma_s=1,00$	$\gamma_s=1,15$	$\gamma_s=1,00$
0,05	0,191	0,208	0,220	0,240
0,10	0,233	0,250	0,261	0,280
0,15	0,276	0,292	0,302	0,320
	Situaciones en las que el valor de x^* se alcanza en el dominio 2			
	Situaciones en las que el valor de x^* se alcanza en un dominio superior al dominio 2			

Tabla 5-2. x^*/d : Valores de x para los que se alcanza $\rho_2=1$

En general en este dominio la armadura de compresión va a estar trabajando por debajo de su límite elástico. Los aceros y recubrimientos correspondientes a las casillas en color oscuro trabajarán en todo el dominio por debajo de su límite elástico, y por lo tanto con $\rho_2 < 1$. Los aceros y recubrimientos correspondientes a las casillas en blanco trabajarán a su límite elástico, y por lo tanto $\rho_2=1$, únicamente para valores de x por encima de los indicados en dicha tabla.

5.3 Dominio 3

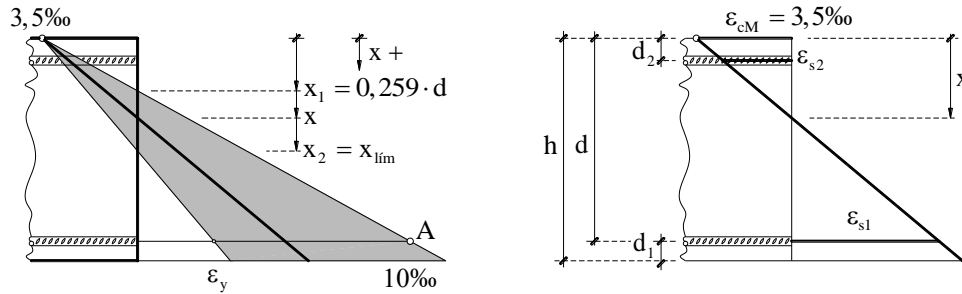


Fig. 5-4

- La deformación de la armadura de tracción, ε_{s1} , está comprendida entre $\varepsilon_y \leq \varepsilon_{s1} \leq 0,01$, por lo que ésta trabaja a su límite elástico, $\sigma_{s1} = f_{yd}$, y por lo tanto $\rho_1 = 1$. Esta deformación disminuye al aumentar la profundidad de la fibra neutra. La deformación de esta armadura la obtuvimos con las ecuaciones de compatibilidad y era:

$$\varepsilon_{s1} = 0,0035 \frac{d - x}{x}$$

- La tensión adimensional de la armadura de compresión será:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{s2} &= 0,0035 \frac{x - d_2}{x} \\ \rho_2 &= \frac{\sigma_{s2}}{f_{yd}} = \frac{E_s \cdot \varepsilon_{s2}}{f_{yd}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \rho_2 = \frac{700}{f_{yd}} \frac{x - d_2}{x}$$

La deformación de la armadura de compresión es creciente con la profundidad de la fibra neutra, por lo tanto los aceros y recubrimientos que alcanzaron el límite elástico en el dominio 2 seguirán trabajando a su límite elástico y por lo tanto con $\rho_2 = 1$. Para el resto podemos calcular el valor de x^* , para el que se alcanza el límite elástico de la armadura de compresión: es decir, $\varepsilon_{s2} = \varepsilon_y$ ó $\rho_2 = 1$, sin más que hacer en la expresión de ρ_2 en función de x , $\rho_2 = 1$:

$$\frac{x^*}{d} = \frac{\frac{700}{f_{yd}} \frac{d - d_2}{d}}{\frac{700}{f_{yd}} - 1}$$

Los valores obtenidos de esta expresión para x^* son válidos no solo en dominio 3 sino también en el 4, al ser las ecuaciones de compatibilidad idénticas en ambos dominios.

En la tabla 5-3 se muestran los valores de x_{lim} para los aceros de dureza natural y para los distintos coeficientes parciales de seguridad. Los valores de x^* , para los distintos tipos de acero y recubrimientos normales, son los que se muestran en la tabla 5-4. En las casillas de la tabla de color oscuro se han obtenido valores de x correspondientes al dominio 2, que corresponden a los aceros y recubrimientos que alcanzaron el valor de x^* en el dominio 2 y cuyos valores numéricos no son correctos (los valores correctos son los obtenidos en el dominio anterior). Únicamente las casillas de color claro corresponden con situaciones en las que el valor de x^* se alcanza en el dominio 3 y por lo tanto son las únicas con valores numéricos correctos.

B 400S		B 500S	
$\gamma_s=1,15$	$\gamma_s=1,00$	$\gamma_s=1,15$	$\gamma_s=1,00$
0,668	0,636	0,583	0,617

Tabla 5-3. $\frac{x_{lim}}{d}$, Profundidad límite de la fibra neutra en el dominio 3

	B 400S		B 500S	
d_2 / d	$\gamma_s=1,15$	$\gamma_s=1,00$	$\gamma_s=1,15$	$\gamma_s=1,00$
0,05	0,099	0,117	0,132	0,175
0,10	0,199	0,233	0,264	0,350
0,15	0,298	0,350	0,396	0,525
	Situaciones en las que el valor de x^* se alcanza en el dominio 2			
	Situaciones en las que el valor de x^* se alcanza en el dominio 3			

Tabla 5-4. x^*/d : Valores de x para los que se alcanza $\rho_2=1$

Como se comentó en el apartado anterior, para los aceros y recubrimientos normales, la armadura de compresión alcanza el límite elástico en el dominio 2, y únicamente para elevados recubrimientos esto sucede en el dominio 3. Además, para $x = x_{lim}$ la armadura de compresión se encuentra trabajado, para cualquier tipo de acero y recubrimiento (dentro de los límites prácticos), a su límite elástico. Por lo tanto, lo normal en este dominio es que $\rho_2 = 1$.

5.4 Dominio 4

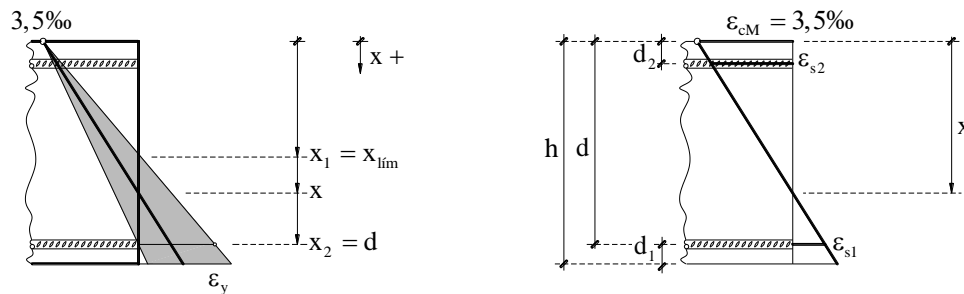


Fig. 5-5

- La deformación de la armadura de tracción es inferior a ε_y y disminuye al aumentar la profundidad de la fibra neutra hasta alcanzar el valor $\varepsilon_{s1} = 0$ para $x = d$. Por lo tanto, en todo el dominio, $\sigma_{s1} < f_{yd}$ y $\rho_1 < 1$ (ver Fig. 5-8). El valor de ésta tensión adimensional será:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{s1} &= 0,0035 \frac{d-x}{x} \\ \rho_1 &= \frac{\sigma_{s1}}{f_{yd}} = \frac{E_s \cdot \varepsilon_{s1}}{f_{yd}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \rho_1 = \frac{700}{f_{yd}} \frac{d-x}{x}$$

- La tensión adimensional de la armadura de compresión será:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{s2} &= 0,0035 \frac{x - d_2}{x} \\ \rho_2 &= \frac{\sigma_{s2}}{f_{yd}} = \frac{E_s \cdot \varepsilon_{s2}}{f_{yd}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \rho_2 = \frac{700}{f_{yd}} \frac{x - d_2}{x}$$

La deformación de la armadura superior o de compresión sigue aumentando al aumentar la profundidad de la fibra neutra (ver Fig. 5-8), por lo tanto los aceros y recubrimientos que alcanzaron el límite elástico en los dominios 2 o 3 seguirán trabajando a su límite elástico y por lo tanto con $\rho_2 = 1$. Los aceros con recubrimientos muy elevados alcanzarán su límite elástico finalmente en este dominio, y la profundidad para la cual sucede esto, x^* , es la deducida en el dominio 3, al ser las ecuaciones de compatibilidad idénticas en dominio 3 y 4.

5.5 Dominio 4-a

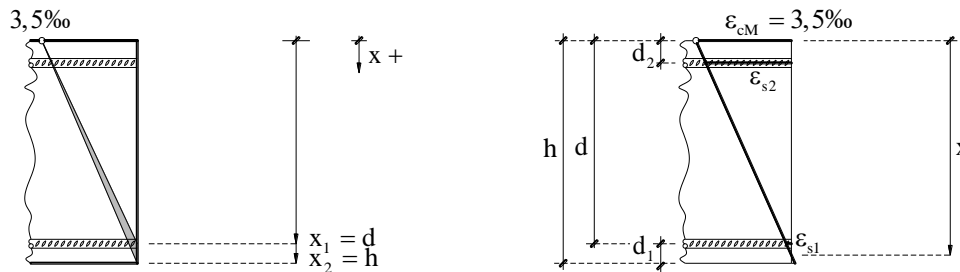


Fig. 5-6

- La armadura inferior comienza, para $x = d$, con una deformación nula, $\varepsilon_{s1} = 0$, y al aumentar la profundidad de la fibra neutra aumenta la deformación de ésta empezando a trabajar a compresión (ver Fig. 5-8, donde se ha representado la deformación de la armadura inferior con signo negativo para indicar que está trabajando a compresión).

La tensión adimensional de la armadura inferior, ó menos comprimida, será:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{s1} &= 0,0035 \frac{x - d}{x} \\ \rho_1 &= \frac{\sigma_{s1}}{f_{yd}} = \frac{E_s \cdot \varepsilon_{s1}}{f_{yd}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \rho_1 = \frac{700}{f_{yd}} \frac{x - d}{x}$$

En este dominio la armadura menos comprimida va a trabajar siempre con una deformación inferior a la de su límite elástico, $\varepsilon_{s1} < \varepsilon_y$, por lo que su tensión va a ser $\sigma_{s1} < f_{yd}$, y por lo tanto $\rho_1 < 1$.

- La deformación de la armadura más comprimida deducida en las ecuaciones de compatibilidad era:

$$\varepsilon_{s2} = 0,0035 \frac{x - d_2}{x}$$

que coincide con la expresión obtenida para los dominios 3 y 4.

En este dominio la deformación de la armadura superior sigue aumentando al aumentar la profundidad de la fibra neutra, alcanzando un máximo para $x = h$, por lo que si ya en el dominio 4 cualquier acero con cualquier recubrimiento había alcanzado el límite elástico, la deformación de la armadura de compresión seguirá siendo superior a la correspondiente al límite elástico, $\varepsilon_{s2} > \varepsilon_y$, por lo que ésta trabajará a su límite elástico, $\sigma_{s2} = f_{yd}$, y por lo tanto $\rho_2 = 1$.

5.6 Dominio 5

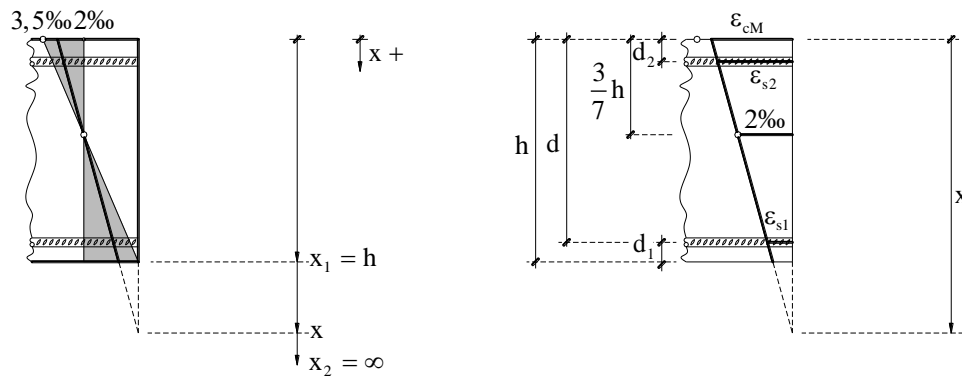


Fig. 5-7

- La tensión adimensional de la armadura inferior ó menos comprimida será:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{s1} &= 0,002 \frac{x-d}{x-\frac{3}{7}h} \\ \rho_1 &= \frac{\sigma_{s1}}{f_{yd}} = \frac{E_s \cdot \varepsilon_{s1}}{f_{yd}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \rho_1 = \frac{400}{f_{yd}} \frac{x-d}{x-\frac{3}{7}h}$$

La deformación de la armadura menos comprimida ó inferior es inicialmente, para $x = h$, $\varepsilon_{s1} < \varepsilon_y$, como se ha comentado en el dominio 4a. Al aumentar la profundidad de la fibra neutra esta deformación aumenta hasta alcanzar una deformación máxima, para $x = \infty$, igual a $\varepsilon_{s1} = 2\text{‰}$. Para los aceros cuya deformación correspondiente al límite elástico sea $\varepsilon_y \leq 2\text{‰}$, se alcanzará un valor de la profundidad de la fibra neutra $x = x^*_1$ para el cual se haga $\varepsilon_{s1} = \varepsilon_y$. Por lo tanto para valores de $x < x^*_1$ será $\rho_1 < 1$ y para valores de $x \geq x^*_1$ será $\rho_1 = 1$ (ver Fig. 5-8). En la Tabla 3-1 se mostraron los valores de ε_y para los distintos tipos de acero y niveles de control. De esta tabla se deduce que únicamente el acero B 400S alcanzará el valor x^*_1 , no alcanzándolo el acero B 500S.

Podemos calcular el valor de x^*_1 , para el que se alcanza el límite elástico de la armadura de inferior; es decir, $\varepsilon_{s1} = \varepsilon_y$ ó $\rho_1 = 1$, sin más que hacer en la expresión de ρ_1 en función de x , $\rho_1 = 1$:

$$x^*_1 = \frac{\frac{400}{f_{yd}} d - \frac{3}{7}h}{\frac{400}{f_{yd}} - 1}$$

En la Tabla 3-6 se muestran los valores de x para los que se hace $\rho_1 = 1$. Las casillas rayadas corresponden a aquellos casos en los que la armadura nunca alcanza el límite elástico dentro del dominio 5.

	B 400S		B 500S	
d_1/h	$\gamma_s=1,15$	$\gamma_s=1,00$	$\gamma_s=1,15$	$\gamma_s=1,00$
0,05	4,426	∞	---	---
0,10	4,043	∞	---	---
0,15	3,660	∞	---	---

Tabla 5-6. x_1^*/h : Valores de x para los que se alcanza $\rho_1 = 1$

➤ La tensión adimensional de la armadura superior ó más comprimida será:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{s2} &= 0,002 \frac{x - d_2}{x - \frac{3}{7}h} \\ \rho_2 &= \frac{\sigma_{s2}}{f_{yd}} = \frac{E_s \cdot \varepsilon_{s2}}{f_{yd}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \rho_{s2} = \frac{400}{f_{yd}} \frac{x - d_2}{x - \frac{3}{7}h}$$

Tal como se comentó en el dominio 4a la armadura superior, para $x = h$, alcanza la máxima deformación (a compresión), siendo $\varepsilon_{s2} > \varepsilon_y$, y por lo tanto $\rho_2 = 1$. En el dominio 5 al aumentar la profundidad de la fibra neutra disminuye la deformación de ésta, alcanzando un valor mínimo, para $x = \infty$, igual a $\varepsilon_{s2} = 2\%$.

En la Tabla 5-7 se muestra el intervalo de deformaciones de la armadura más comprimida.

	$\varepsilon_{2,\text{máx}} (x = h)$	$\varepsilon_{2,\text{min}} (x = \infty)$
$d_2 = 0,05 \cdot h$	3,33	2,00
$d_2 = 0,10 \cdot h$	3,15	2,00
$d_2 = 0,15 \cdot h$	2,98	2,00
Tabla 5-7. Intervalo de deformación de la armadura más comprimida (%)		

Para los aceros cuya deformación correspondiente al límite elástico sea $\varepsilon_y > 2\%$, se alcanzará un valor de la profundidad de la fibra neutra $x = x_{2,\text{sup}}$ para el cual se haga $\varepsilon_{s2} = \varepsilon_y$. Por lo tanto para valores de $x \leq x_{2,\text{sup}}$ será $\rho_2 = 1$ y para valores de $x > x_{2,\text{sup}}$ será $\rho_2 < 1$ (ver Fig. 5-8). En la tabla 3-1 se mostraron los valores de ε_y para los distintos tipos de acero y niveles de control. De esta tabla se deduce que el acero B 400S no alcanzará el valor $x_{2,\text{sup}}$, y por lo tanto será únicamente éste el que se mantenga trabajando en todo el dominio 5 con su límite elástico y por lo tanto con $\rho_2 = 1$. Por el contrario el acero B 500S sí alcanzará el valor $x_{2,\text{sup}}$ y por lo tanto para valores de la profundidad de la fibra neutra $x \leq x_{2,\text{sup}}$ trabajará con $\rho_2 = 1$ y para valores de $x > x_{2,\text{sup}}$ lo harán con $\rho_2 < 1$.

Podemos calcular el valor de $x_{2,\text{sup}}$ para el que la armadura superior deja de trabajar a su límite elástico: es decir $\varepsilon_{s2} = \varepsilon_y$ ó $\rho_2 = 1$, sin más que hacer en la expresión de ρ_2 en función de x , $\rho_2 = 1$:

$$x_{2,\text{sup}} = \frac{\frac{400}{f_{yd}} d_2 - \frac{3}{7}h}{\frac{400}{f_{yd}} - 1}$$

En la tabla 5-8 se muestran los valores de $x_{2,\text{sup}}$. Las casillas rayadas corresponden a aquellos casos en los que la armadura nunca deja de trabajar a su límite elástico dentro del dominio 5.

	B 400S		B 500S	
d_2 / h	$\gamma_s=1,15$	$\gamma_s=1,00$	$\gamma_s=1,15$	$\gamma_s=1,00$
0,05	---	---	4,782	1,943
0,10	---	---	4,207	1,743
0,15	---	---	3,632	1,543

Tabla 5-8. $x_{2,\text{sup}}/h$: Valores de x para los que se hace $\rho_2 < 1$

Igualmente de esta tabla se deduce que únicamente para aquellos aceros cuya $f_{yd} \leq 400 \frac{N}{\text{mm}^2}$ ⁸ la armadura se encontrará, en todo el dominio, trabajando a su límite elástico. Es por este motivo por lo que la Norma establece como resistencia de cálculo del acero en compresión simple (cuando la armadura trabaja con una deformación del 2‰) el valor máximo de $400 \frac{N}{\text{mm}^2}$ (este tema ya fue tratado en el apartado 7.4).

En la página siguiente se muestra una tabla resumen con los valores de las deformaciones de las armaduras y los correspondientes valores de ρ , para cada uno de los dominios.

⁸ Si $f_{yd} \leq 400 \frac{N}{\text{mm}^2} \Rightarrow \varepsilon_y = \frac{f_{yd}}{E_s} \leq \frac{400}{200.000} = 0,002$

Dom.	Arm.	Deformación	ρ	
1	Sup.	$\varepsilon_{s2} = 0,010 \frac{d_2 - x}{d - x}$	$\rho_2 = 1 \quad -\infty < x \leq x_{2,inf}$ $\rho_2 = \frac{2000}{f_{yd}} \frac{d_2 - x}{d - x} \quad x_{2,inf} < x \leq 0$	$\frac{x_{2,inf}}{d} = \frac{1 - \frac{2000}{f_{yd}} \frac{d_2}{d}}{1 - \frac{2000}{f_{yd}}}$
	Inf.	$\varepsilon_{s1} = 0,010$	$\rho_1 = 1$	
2	Sup.	$\varepsilon_{s2} = 0,010 \frac{x - d_2}{d - x}$	$\rho_2 = \frac{2000}{f_{yd}} \frac{x - d_2}{d - x} \quad 0 \leq x < x^*$ $\rho_2 = 1 \quad x^* \leq x \leq 0,259 \cdot d$	$\frac{x^*}{d} = \frac{1 + \frac{2000}{f_{yd}} \frac{d_2}{d}}{1 + \frac{2000}{f_{yd}}}$
	Inf.	$\varepsilon_{s1} = 0,010$	$\rho_1 = 1$	
3	Sup.	$\varepsilon_{s2} = 0,0035 \frac{x - d_2}{x}$	$\rho_2 = \frac{700}{f_{yd}} \frac{x - d_2}{x} \quad 0,259 \cdot d \leq x < x^*$ $\rho_2 = 1 \quad x^* \leq x \leq x_{lim}$	$\frac{x^*}{d} = \frac{\frac{700}{f_{yd}} \frac{d_2}{d}}{\frac{700}{f_{yd}} - 1}$
	Inf.	$\varepsilon_{s1} = 0,0035 \frac{d - x}{x} > \varepsilon_y$	$\rho_1 = 1$	
4	Sup.	$\varepsilon_{s2} = 0,0035 \frac{x - d_2}{x}$	$\rho_2 = \frac{700}{f_{yd}} \frac{x - d_2}{x} \quad x_{lim} \leq x < x^*$ $\rho_2 = 1 \quad x^* \leq x \leq d$	$\frac{x^*}{d} = \frac{\frac{700}{f_{yd}} \frac{d_2}{d}}{\frac{700}{f_{yd}} - 1}$
	Inf.	$\varepsilon_{s1} = 0,0035 \frac{d - x}{x} < \varepsilon_y$	$\rho_1 = \frac{700}{f_{yd}} \frac{d - x}{x}$	
4-a	Sup.	$\varepsilon_{s2} = 0,0035 \frac{x - d_2}{x}$	$\rho_2 = 1$	
	Inf.	$\varepsilon_{s1} = 0,0035 \frac{x - d}{x}$	$\rho_1 = \frac{700}{f_{yd}} \frac{x - d}{x}$	
5	Sup.	$\varepsilon_{s2} = 0,002 \frac{x - d_2}{x - \frac{3}{7}h}$	$\rho_2 = 1 \quad h \leq x \leq x_{2,sup}$ $\rho_2 = \frac{400}{f_{yd}} \frac{x - d_2}{x - \frac{3}{7}h} \quad x_{2,sup} < x < \infty$	$\frac{x_{2,sup}}{h} = \frac{\frac{400}{f_{yd}} \frac{d_2}{h} - \frac{3}{7}}{\frac{400}{f_{yd}} - 1}$
	Inf.	$\varepsilon_{s1} = 0,002 \frac{x - d}{x - \frac{3}{7}h}$	$\rho_1 = \frac{400}{f_{yd}} \frac{x - d}{x - \frac{3}{7}h} \quad h \leq x < x_1^*$ $\rho_1 = 1 \quad x_1^* \leq x < \infty$	$\frac{x_1^*}{h} = \frac{\frac{400}{f_{yd}} \frac{d}{h} - \frac{3}{7}}{\frac{400}{f_{yd}} - 1}$

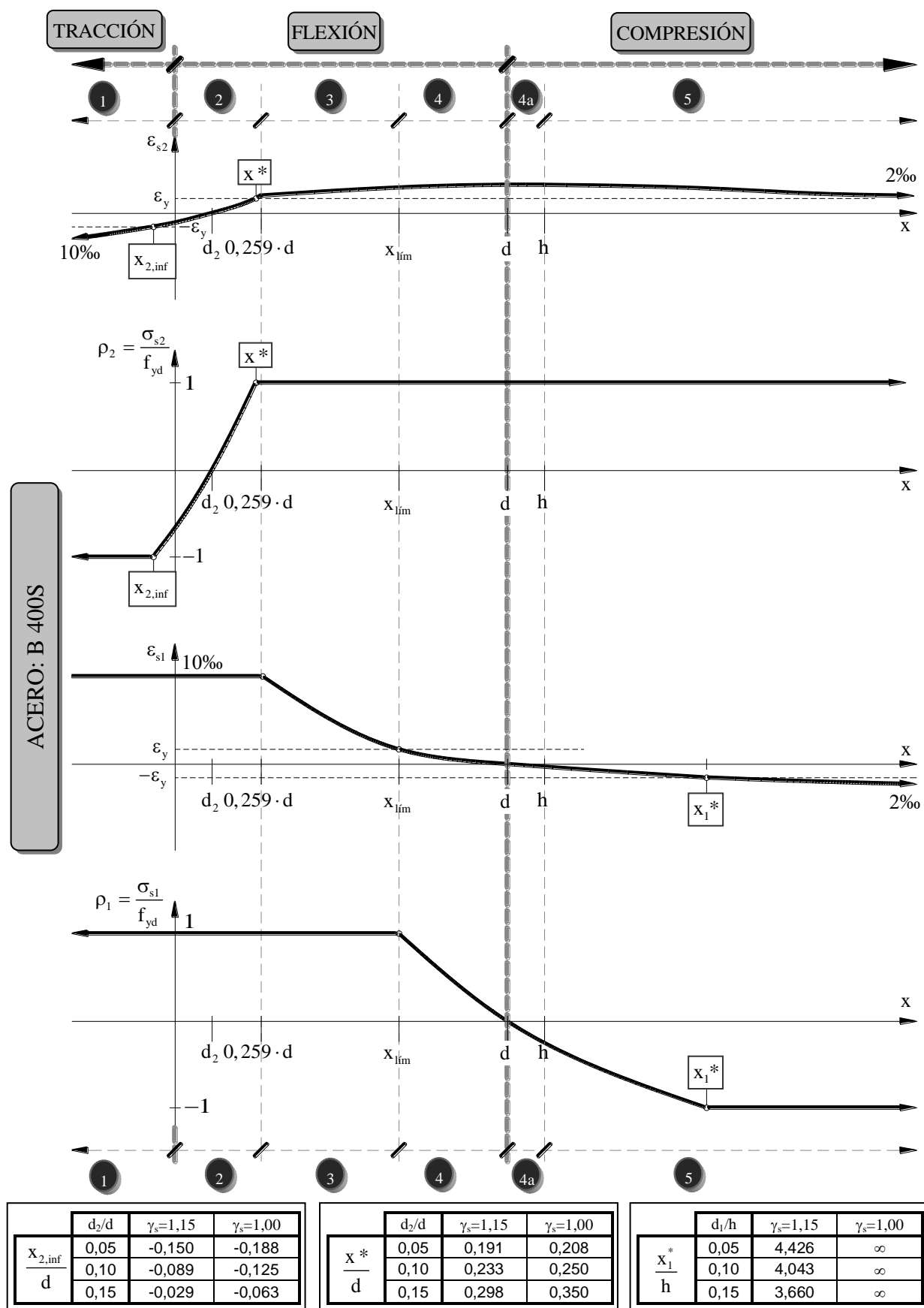


Fig. 5-8. a)

6. ECUACIONES DE EQUILIBRIO

En este apartado vamos a suponer una sección que cumpla las condiciones (Fig. 6-1):

- ❶ La sección de hormigón armado tiene un eje de simetría.
- ❷ Los esfuerzos, axil y momento flector, actúan en el plano definido por este eje de simetría y la directriz de la pieza.
- ❸ La sección irá provista de dos armaduras principales A_{s1} y A_{s2} .

En esta situación el eje neutro es perpendicular al eje de simetría de la sección⁹. Cuando no se cumplan estas condiciones la solicitación será esviada, y el planteamiento de este problema lo realizaremos en un tema posterior

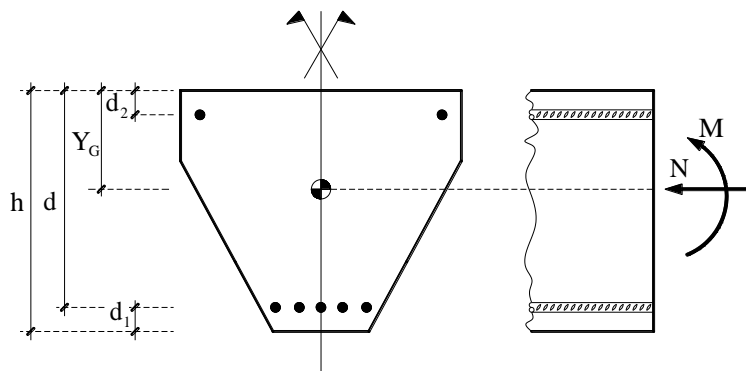


Fig. 6-1

La solicitación que actúa sobre la sección se determina generalmente mediante un cálculo elástico y lineal partiendo de las cargas que solicitan a la estructura, para lo cual se utiliza como eje de referencia el eje baricéntrico de la sección de hormigón solo sin fisurar (Fig. 6-1). En estas circunstancias, los esfuerzos obtenidos del cálculo (análisis estructural) vienen referidos a dicho eje.

En ocasiones es interesante representar la solicitación dada por el axil, N , y el momento, M , como el mismo axil aplicado con una excentricidad e_0 ¹⁰ (Fig. 6-2).

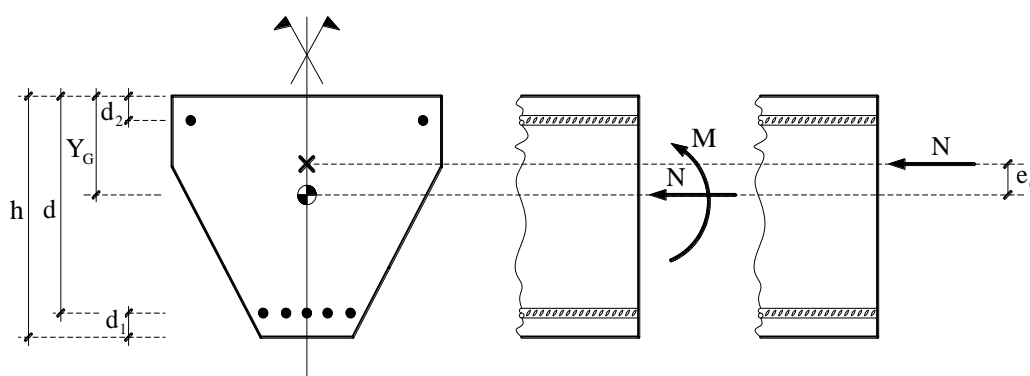


Fig. 6-2

Para que estas solicitaciones sean estáticamente equivalentes, el valor de la excentricidad tiene que ser:

$$M = N \cdot e_0 \Rightarrow e_0 = \frac{M}{N}$$

⁹ La condición ❸ no es necesaria y la extensión de los resultados al caso de secciones de hormigón con múltiples capas de armaduras (A_{s1} , A_{s2} , A_{s3} , ..., A_{sn}) es inmediata, sin más que sustituir el término correspondiente a la armadura superior, A_{s2} , por una sumatoria extendida a todas las capas de armadura: A_{s2} , A_{s3} , ..., A_{sn}

¹⁰ El subíndice ₀ indica que la excentricidad está referida al eje baricéntrico de la sección.

Como más adelante se verá, para el planteamiento de las ecuaciones de equilibrio es muy conveniente referir las solicitaciones externas, no al eje baricéntrico de la sección de hormigón, N y M o N y e_0 , sino a los ejes baricéntricos de las armaduras de tracción o de compresión.

En los casos de **tracción simple o compuesta** las solicitaciones externas las referiremos a los ejes baricéntricos de las armaduras de tracción, N y M_1 o N y e_1 (Fig. 6-3).

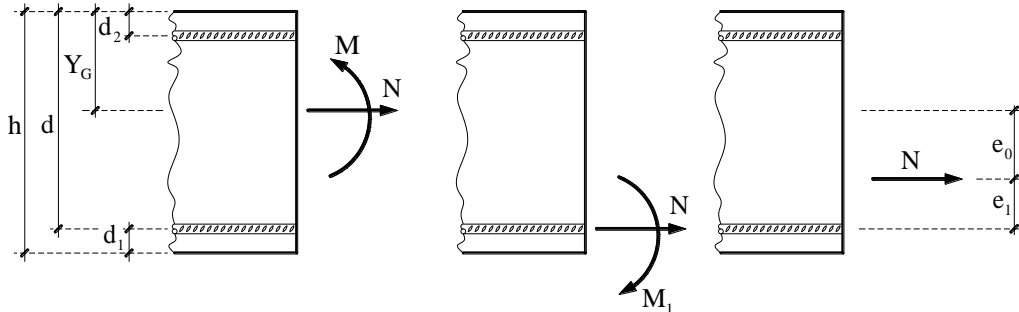


Fig. 6-3

Los valores del momento M_1 y de la excentricidad e_1 serán:

$$M_1 = N \cdot (d - Y_G) - M$$

$$e_1 = \frac{M_1}{N} \quad \Leftrightarrow \quad e_1 = (d - Y_G) - e_0$$

En los casos de **flexión simple o compuesta** las solicitaciones externas las referiremos a los ejes baricéntricos de las armaduras de tracción, N y M_1 o N y e_1 (Fig. 6-4).

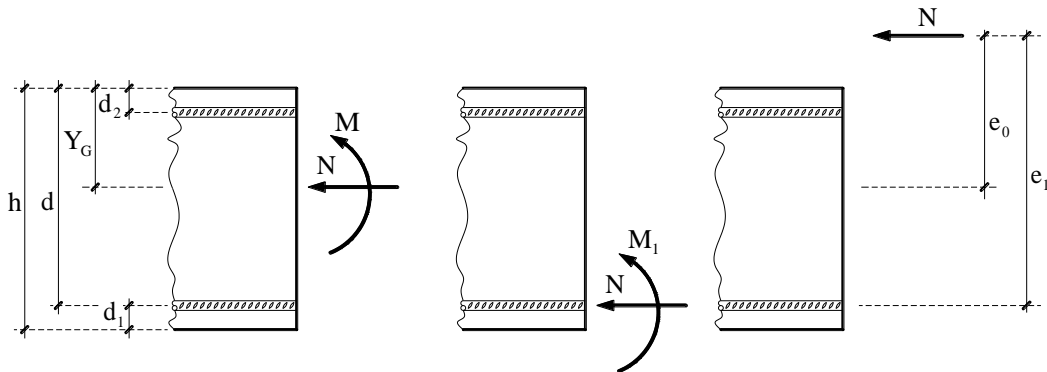


Fig. 6-4

Los valores del momento M_1 y de la excentricidad e_1 serán:

$$M_1 = M + N \cdot (d - Y_G)$$

$$e_1 = \frac{M_1}{N} \quad \Leftrightarrow \quad e_1 = e_0 + (d - Y_G)$$

En los casos de **compresión simple o compuesta** las solicitaciones externas las referiremos a los ejes baricéntricos de las armaduras de compresión, N y M_2 o N y e_2 (Fig. 6-5).

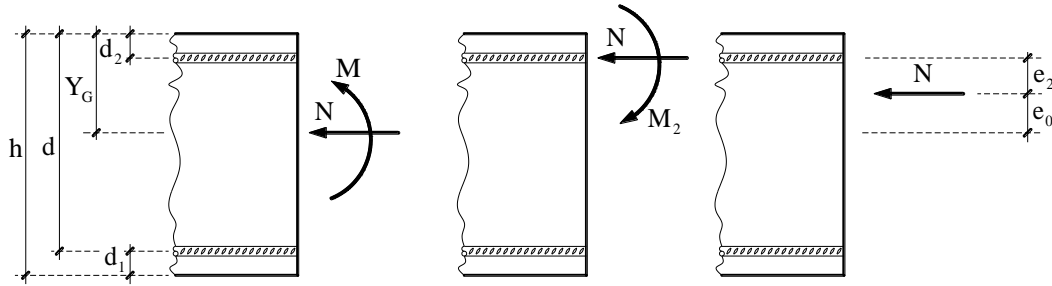


Fig. 6-5

Los valores del momento M_2 y de la excentricidad e_2 serán:

$$M_2 = N \cdot (Y_G - d_2) - M$$

$$e_2 = \frac{M_2}{N} \Leftrightarrow e_2 = (Y_G - d_2) - e_0$$

Como se ha comentado anteriormente, dependiendo del tipo de solicitación, tracción, flexión o compresión, las solicitaciones externas interesa referirlas al eje baricéntrico de la armadura de tracción, en los dos primeros casos, y al de la armadura de compresión en el tercero. Así pues, plantearemos por separado las ecuaciones de equilibrio para cada uno de estos casos.

6.1 Tracción simple o compuesta.

En el caso de tracción simple o compuesta toda la sección de hormigón se encuentra trabajando a tracción, y por lo tanto, totalmente fisurada. En este caso la contribución del hormigón a la resistencia de la sección es nula, y las ecuaciones de equilibrio son (Fig. 6-6):

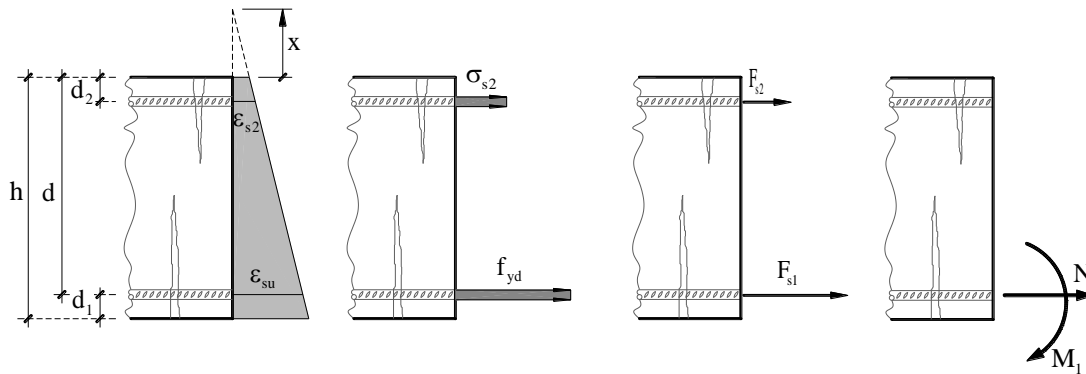


Fig. 6-6

$$N = F_{s2} + F_{s1}$$

$$M_1 = F_{s2} \cdot (d - d_2)$$

Teniendo en cuenta que $F_{s1} = A_{s1} \cdot \sigma_{s1}$ y $F_{s2} = A_{s2} \cdot \sigma_{s2}$, y que $\sigma_{s1} = f_{yd}$ ya que $\epsilon_{s1} = 0,01 > \epsilon_y$, podemos expresar las ecuaciones de equilibrio de la forma:

$$N = A_{s2} \cdot \sigma_{s2} + A_{s1} \cdot f_{yd}$$

$$M_1 = A_{s2} \cdot \sigma_{s2} \cdot (d - d_2)$$

siendo el criterio de signos el indicado en la Fig. 6-6

6.2 Flexión simple o compuesta.

En el caso de flexión simple o compuesta las ecuaciones de equilibrio son (Fig. 6-7):

$$N = N_{cu} + F_{s2} - F_{s1}$$

$$M_1 = N_{cu} \cdot Z_{cu1} + F_{s2} \cdot (d - d_2)$$

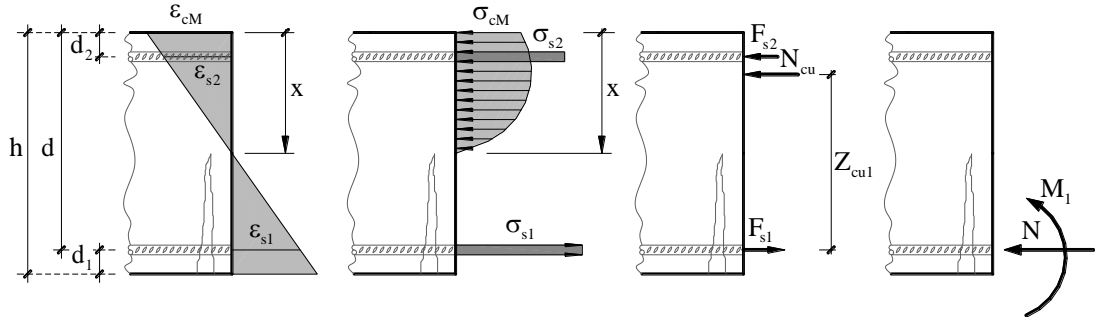


Fig. 6-7

Denotando a $N_{cu} \cdot Z_{cu1}$ por M_{cu1} , y teniendo en cuenta que $F_{s1} = A_{s1} \cdot \sigma_{s1}$ y $F_{s2} = A_{s2} \cdot \sigma_{s2}$, podemos expresar las ecuaciones de equilibrio de la forma:

$$N = N_{cu} + A_{s2} \cdot \sigma_{s2} - A_{s1} \cdot \sigma_{s1}$$

$$M_1 = M_{cu1} + A_{s2} \cdot \sigma_{s2} \cdot (d - d_2)$$

siendo el criterio de signos el indicado en la Fig. 6-7.

6.3 Compresión simple o compuesta.

En el caso de compresión simple o compuesta las ecuaciones de equilibrio son (Fig. 6-8):

$$N = N_{cu} + F_{s2} + F_{s1}$$

$$M_2 = N_{cu} \cdot Z_{cu2} + F_{s1} \cdot (d - d_2)$$

Al igual que en el caso de flexión, si denotamos a $N_{cu} \cdot Z_{cu2}$ por M_{cu2} , y teniendo en cuenta que

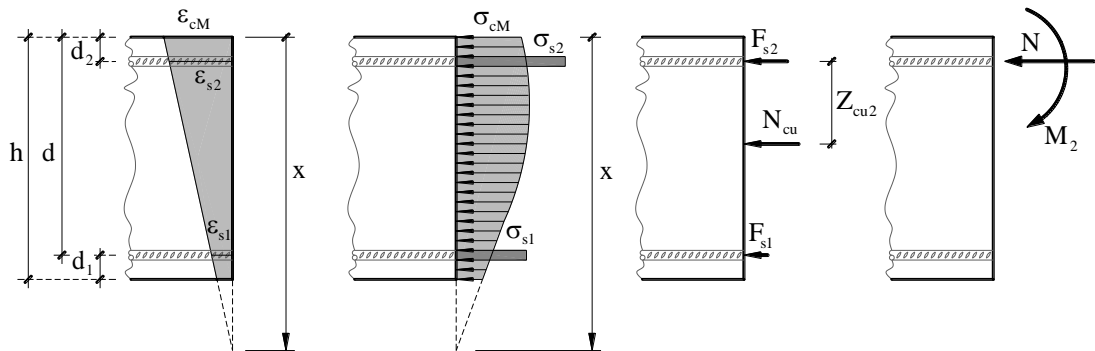


Fig. 6-8

$F_{s1} = A_{s1} \cdot \sigma_{s1}$ y $F_{s2} = A_{s2} \cdot \sigma_{s2}$, podemos expresar las ecuaciones de equilibrio de la forma:

$$N = N_{cu} + A_{s2} \cdot \sigma_{s2} + A_{s1} \cdot \sigma_{s1}$$

$$M_2 = M_{cu2} + A_{s1} \cdot \sigma_{s1} \cdot (d - d_2)$$

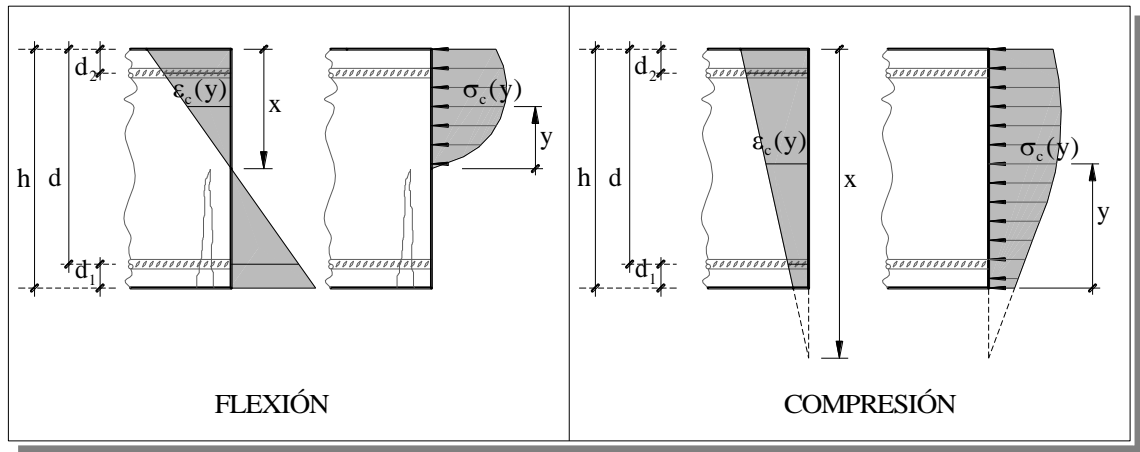
siendo el criterio de signos el indicado en la Fig. 6-8.

En el agotamiento, la zona comprimida del hormigón depende del tipo de solicitación y de la cuantía de la armadura. Dado que la profundidad de la fibra neutra no se conoce y es función de la solicitación, deberá determinarse por cálculo para cada estado de carga.

7. ESFUERZOS SOPORTADOS POR EL HORMIGÓN

Para valores de la profundidad del eje neutro negativos (solicitaciones de tracción), el hormigón se encuentra fisurado y no contribuye en la resistencia de la sección. Para valores positivos (situaciones de flexión y compresión) los esfuerzos soportados por el hormigón serán:

$$N_{cu} = \int_{y=0}^{y=x} \sigma_c(y) \cdot b(y) \cdot dy$$



$$M_{cu1} = \int_{y=0}^{y=x} \sigma_c(y) \cdot b(y) \cdot (d - x + y) \cdot dy \quad \text{ó} \quad M_{cu2} = \int_{y=0}^{y=h} \sigma_c(y) \cdot b(y) \cdot (d - d_2 - y) \cdot dy$$

El procedimiento para realizar estas integrales, para un determinado valor de la profundidad del eje neutro, x , será:

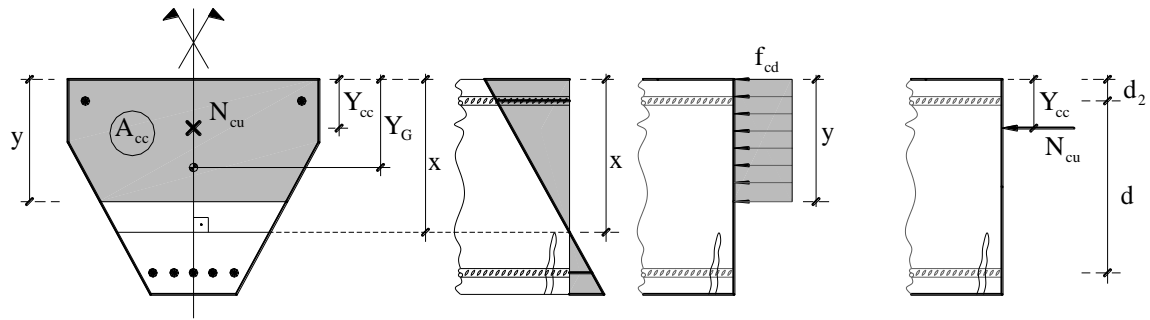
- ❶ Establecer la compatibilidad de deformaciones para obtener la deformación de la fibra de hormigón a profundidad y : $\varepsilon_c(y)$.
- ❷ A partir del diagrama tensión-deformación del hormigón, $\sigma_c = \sigma_c(\varepsilon)$ (comportamiento), se obtiene la tensión de la fibra de hormigón a profundidad y : $\sigma_c(y)$.

Finalmente obtendríamos los esfuerzos que serán función de la profundidad de la fibra neutra, x .

7.1 Diagrama rectangular.

En el caso de utilizar como diagrama tensión-deformación del hormigón el diagrama rectangular, el procedimiento para obtener los esfuerzos soportados por el hormigón se simplifica notablemente, al ser las tensiones $\sigma_c(y)$ constantes y de valor $\sigma_c(y) = f_{cd}$. Además este paquete de compresiones se extiende en una profundidad igual a:

- $y = 0,8 \cdot x$ para $x \leq h$
- $y = \left(1 - 0,2 \cdot \frac{h}{x}\right) \cdot h$ para $x > h$



Los esfuerzos soportados por el hormigón valen:

$$N_{cu} = f_{cd} \cdot A_{cc}$$

$$Z_{cu1} = d - Y_{cc} \Rightarrow M_{cu1} = f_{cd} \cdot A_{cc} \cdot (d - Y_{cc})$$

$$Z_{cu2} = Y_{cc} - d_2 \Rightarrow M_{cu2} = f_{cd} \cdot A_{cc} \cdot (Y_{cc} - d_2)$$

donde:

A_{cc} : Área de la sección de hormigón comprimido.

Y_{cc} : Profundidad del centro de gravedad de la sección de hormigón comprimido.

□ Sección rectangular

Para una sección rectangular se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} A_{cc} = y \cdot b \\ Y_{cc} = 0,5 \cdot y \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} N_{cu} = b \cdot y \cdot f_{cd} \\ M_{cu1} = b \cdot y \cdot f_{cd} \cdot (d - 0,5 \cdot y) \\ M_{cu2} = b \cdot y \cdot f_{cd} \cdot (0,5 \cdot y - d_2) \end{array} \right.$$

Para $x \leq h$ (flexión) y sección rectangular :

$$N_{cu} = b \cdot x \cdot f_{cd}$$

$$Z_{cu1} = d - Y_{cc} \Rightarrow M_{cu1} = 0,8 \cdot b \cdot x \cdot f_{cd} \cdot (d - 0,4 \cdot x)$$

$$Z_{cu2} = Y_{cc} - d_2 \Rightarrow M_{cu2} = 0,8 \cdot b \cdot x \cdot f_{cd} \cdot (0,4 \cdot x - d_2)$$

8. ECUACIONES DE EQUILIBRIO Y COMPATIBILIDAD ADIMENSIONALES. SECCIONES RECTANGULARES. DIAGRAMA RECTANGULAR.

Magnitudes adimensionales son aquellas que, como su propio nombre indica, no tienen dimensiones. Éstas se obtienen dividiendo la magnitud física que queremos adimensionalizar por otra con igual dimensión. Así pues, para adimensionalizar la ecuación de equilibrio de fuerzas dividimos ésta por una magnitud que tenga dimensión de fuerza, para la ecuación de equilibrio de momentos, dividimos por otra de dimensión fuerza · longitud, y para las ecuaciones de compatibilidad por otra de dimensiones 1/longitud. Las magnitudes que se eligen dependen, en general, de la forma que presenten las ecuaciones de equilibrio de la sección (tipo de sección, disposición de armaduras ...).

En lo que sigue realizaremos la adimensionalización de las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad para una sección rectangular, con diagrama tensión-deformación rectangular para el hormigón. La sistemática a seguir para otro tipo de secciones es la misma que la empleada para la sección rectangular.

8.1 Flexión

8.1.1 Ecuaciones de equilibrio

Las ecuaciones de equilibrio en el caso de flexión, deducidas en el apartado 6, son:

$$N = N_{cu} + A_{s2} \cdot \sigma_{s2} - A_{s1} \cdot \sigma_{s1}$$

$$M_1 = M_{cu1} + A_{s2} \cdot \sigma_{s2} \cdot (d - d_2)$$

que si sustituimos los esfuerzos soportados por el hormigón en el caso de sección rectangular con diagrama tensión-deformación rectangular para el hormigón, queda:

$$N = \underbrace{0,8 \cdot b \cdot x \cdot f_{cd}}_{N_{cu}} + A_{s2} \cdot \sigma_{s2} - A_{s1} \cdot \sigma_{s1}$$

$$M_1 = \underbrace{0,8 \cdot b \cdot x \cdot f_{cd} (d - 0,4 \cdot x)}_{M_{cu1}} + A_{s2} \cdot \sigma_{s2} \cdot (d - d_2)$$

A la vista del aspecto que presentan estas ecuaciones, y con objeto de simplificarlas, parece razonable dividir las ecuaciones por:

- Ecuación de equilibrio de fuerzas: $b \cdot d \cdot f_{cd}$
- Ecuación de equilibrio de momentos: $b \cdot d^2 \cdot f_{cd}$

Si hacemos esta división nos queda:

$$\frac{N}{b \cdot d \cdot f_{cd}} = 0,8 \cdot \underbrace{\frac{x}{d}}_{\frac{N_{cu}}{b \cdot d \cdot f_{cd}}} + \frac{A_{s2} \cdot \sigma_{s2}}{b \cdot d \cdot f_{cd}} - \frac{A_{s1} \cdot \sigma_{s1}}{b \cdot d \cdot f_{cd}}$$

$$\frac{M_1}{b \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = 0,8 \cdot \underbrace{\frac{x}{d} (1 - 0,4 \cdot \frac{x}{d})}_{\frac{M_{cu1}}{b \cdot d^2 \cdot f_{cd}}} + \frac{A_{s2} \cdot \sigma_{s2}}{b \cdot d \cdot f_{cd}} \cdot (1 - \frac{d_2}{d})$$

Si multiplicamos y dividimos los términos de las armaduras por f_{yd} , queda:

$$\frac{N}{\underbrace{b \cdot d \cdot f_{cd}}_v} = 0,8 \cdot \underbrace{\frac{x}{d}}_{\xi} + \underbrace{\frac{A_{s2} \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}}}_{\omega_2} \underbrace{\frac{\sigma_{s2}}{f_{yd}}}_{\rho_2} - \underbrace{\frac{A_{s1} \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}}}_{\omega_1} \underbrace{\frac{\sigma_{s1}}{f_{yd}}}_{\rho_1}$$

$$\frac{M_1}{\underbrace{b \cdot d^2 \cdot f_{cd}}_{\mu_1}} = 0,8 \cdot \underbrace{\frac{x}{d}}_{\xi} (1 - 0,4 \cdot \underbrace{\frac{x}{d}}_{\xi}) + \underbrace{\frac{A_{s2} \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}}}_{\omega_2} \underbrace{\frac{\sigma_{s2}}{f_{yd}}}_{\rho_2} \cdot (1 - \underbrace{\frac{d_2}{d}}_{\delta_2})$$

que se pueden escribir, utilizando únicamente variables adimensionales, de la forma:

$\delta_2 = \frac{d_2}{d}$:	Recubrimiento adimensional de la armadura superior. Igualmente se define el recubrimiento adimensional de la armadura inferior como: $\delta_1 = \frac{d_1}{d}$.
$v_{cu} = \frac{N_{cu}}{b \cdot d \cdot f_{cd}}$:	Axil reducido o adimensional soportado por el hormigón en el agotamiento. Para sección rectangular con diagrama tensión-deformación rectangular queda: $v_{cu} = 0,8 \cdot \xi$.
$\eta_{cu1} = \frac{Z_{cu1}}{d}$:	Brazo mecánico adimensional del paquete de compresiones en el hormigón.
$\mu_{cu1} = \frac{M_{cu1}}{b \cdot d^2 \cdot f_{cd}}$:	Momento reducido o adimensional soportado por el hormigón en el agotamiento, respecto a la armadura inferior. Para sección rectangular con diagrama tensión-deformación rectangular queda: $\mu_{cu1} = 0,8 \cdot \xi \cdot (1 - 0,4 \cdot \xi)$.

8.1.2 Ecuaciones de compatibilidad.

Si en las ecuaciones de compatibilidad deducidas en el apartado 4 dividimos por $1/d$, nos queda:

$$\frac{\varepsilon_{cM}}{\frac{x}{d}} = \frac{\varepsilon_{s2}}{\frac{x-d_2}{d}} = \frac{\varepsilon_{s1}}{\frac{d-x}{d}} \Leftrightarrow \frac{\varepsilon_{cM}}{\xi} = \frac{\varepsilon_{s2}}{\xi - \delta_2} = \frac{\varepsilon_{s1}}{1 - \xi}$$

ecuaciones que nos permiten determinar las deformaciones de las distintas fibras de la sección en función de la profundidad de la fibra neutra adimensional.

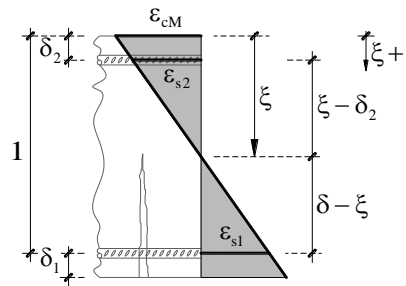


Fig. 4-10

8.2 Compresión

8.2.1 Ecuaciones de equilibrio

Las ecuaciones de equilibrio en el caso de flexión, deducidas en el apartado 6, son:

$$N = N_{cu} + A_{s2} \cdot \sigma_{s2} + A_{s1} \cdot \sigma_{s1}$$

$$M_2 = M_{cu2} + A_{s1} \cdot \sigma_{s1} \cdot (d - d_2)$$

que si sustituimos los esfuerzos soportados por el hormigón en el caso de sección rectangular con diagrama tensión-deformación rectangular para el hormigón, queda:

$$N = \underbrace{b \cdot y \cdot f_{cd}}_{N_{cu}} + A_{s2} \cdot \sigma_{s2} + A_{s1} \cdot \sigma_{s1}$$

$$M_2 = \underbrace{b \cdot y \cdot f_{cd} (0,5 \cdot y - d_2)}_{M_{cu2}} + A_{s1} \cdot \sigma_{s1} \cdot (d - d_2)$$

con

$$\square \quad y = 0,8 \cdot x \quad \text{para } x \leq h$$

$$\square \quad y = \left(1 - 0,2 \cdot \frac{h}{x}\right) \cdot h \quad \text{para } x > h$$

A la vista del aspecto que presentan estas ecuaciones, y con objeto de simplificarlas, parece razonable dividir las ecuaciones por:

$$\square \quad \text{Ecuación de equilibrio de fuerzas: } b \cdot h \cdot f_{cd}$$

$$\square \quad \text{Ecuación de equilibrio de momentos: } b \cdot h^2 \cdot f_{cd}$$

Si hacemos esta división, y al igual que en flexión, multiplicamos y dividimos los términos de las armaduras por f_{yd} , queda:

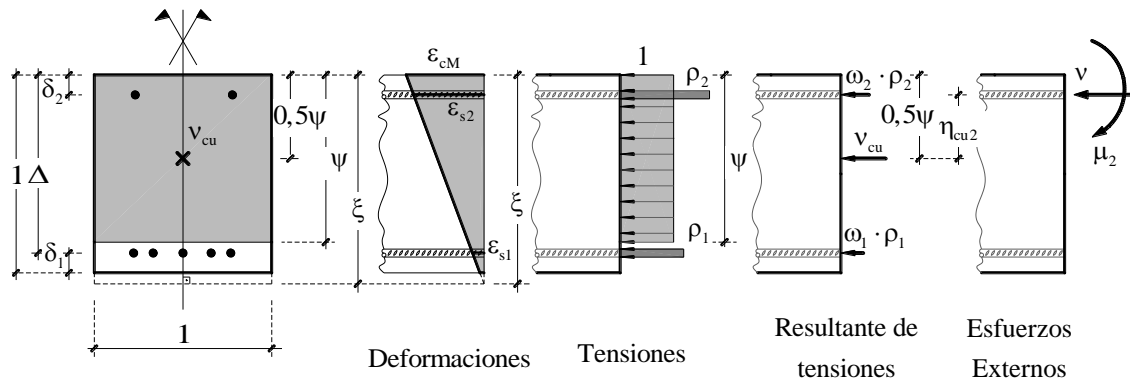
$$\frac{N}{b \cdot h \cdot f_{cd}} = \frac{y}{h} + \frac{A_{s2} \cdot f_{yd}}{b \cdot h \cdot f_{cd}} \frac{\sigma_{s2}}{f_{yd}} + \frac{A_{s1} \cdot f_{yd}}{b \cdot h \cdot f_{cd}} \frac{\sigma_{s1}}{f_{yd}}$$

$$\frac{M_1}{b \cdot h^2 \cdot f_{cd}} = \frac{y}{h} \cdot \left(0,5 \cdot \frac{y}{h} - \frac{d_2}{h} \right) + \frac{A_{s2} \cdot f_{yd}}{b \cdot h \cdot f_{cd}} \frac{\sigma_{s2}}{f_{yd}} \cdot \left(\frac{d}{h} - \frac{d_2}{h} \right)$$

$$v_{cu} = \frac{N_{cu}}{b \cdot h \cdot f_{cd}}$$

$$\mu_{cu2} = \frac{M_{cu1}}{b \cdot h^2 \cdot f_{cd}}$$

que se pueden escribir, utilizando únicamente variables adimensionales, de la forma:



$$v = \psi + \omega_2 \cdot \rho_2 + \omega_1 \cdot \rho_1$$

$$\mu_2 = \underbrace{\psi \cdot (0,5 \cdot \psi - \delta_2)}_{\mu_{cu2}} + \omega_1 \cdot \rho_1 (\Delta - \delta_2)$$

con:

$$v = \frac{N}{b \cdot h \cdot f_{cd}} :$$

Axil reducido o adimensional actuante sobre la sección.

$$\mu_1 = \frac{M_1}{b \cdot h^2 \cdot f_{cd}} :$$

Momento reducido o adimensional respecto a la armadura inferior (de tracción) actuante sobre la sección.

$$\xi = \frac{x}{h} :$$

Profundidad de la fibra neutra adimensional.

$$\psi = \frac{y}{h} :$$

Profundidad del paquete de compresiones adimensional.

$$\omega_1 = \frac{A_{s1} \cdot f_{yd}}{b \cdot h \cdot f_{cd}} :$$

Cuantía mecánica de la armadura inferior o de tracción.

$$\omega_2 = \frac{A_{s2} \cdot f_{yd}}{b \cdot h \cdot f_{cd}} :$$

Cuantía mecánica de la armadura superior o de compresión.

$$\rho_1 = \frac{\sigma_{s1}}{f_{yd}} :$$

Tensión adimensional de la armadura inferior o de tracción, deducida ya en el apartado 5, y que como vimos allí toma valores en el intervalo: $0 \leq \rho_1 \leq 1$, siendo $\rho_1 = 1$ cuando la armadura inferior trabaja a su límite elástico.

$\rho_2 = \frac{\sigma_{s2}}{f_{yd}}$:	Tensión adimensional de la armadura superior o de compresión, deducida también en el apartado 5, y que al igual que ρ_1 toma también valores en el intervalo: $0 \leq \rho_2 \leq 1$, siendo $\rho_2 = 1$ cuando la armadura superior trabaja a su límite elástico.
$\delta_2 = \frac{d_2}{h}$:	Recubrimiento adimensional de la armadura superior. Igualmente se define el recubrimiento adimensional de la armadura inferior como: $\delta_1 = \frac{d_1}{h}$.
$\Delta = \frac{d}{h}$:	Canto útil adimensional
$v_{cu} = \frac{N_{cu}}{b \cdot h \cdot f_{cd}}$:	Axil reducido o adimensional soportado por el hormigón en el agotamiento. Para sección rectangular con diagrama tensión-deformación rectangular queda: $v_{cu} = \psi$.
$\mu_{cu2} = \frac{M_{cu2}}{b \cdot h^2 \cdot f_{cd}}$:	Momento reducido o adimensional soportado por el hormigón en el agotamiento, respecto a la armadura superior. Para sección rectangular con diagrama tensión-deformación rectangular queda: $\mu_{cu2} = \psi \cdot (0,5 \cdot \psi - \delta_2)$.

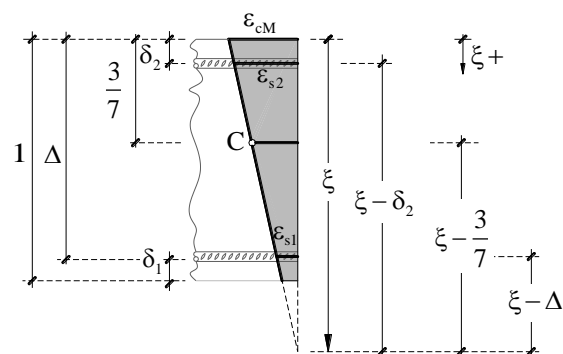
Como se observa, se han utilizado las mismas notaciones que en flexión para aquellas variables que representan lo mismo, y cuya única diferencia es que en flexión, la longitud vertical con la que se adimensionaliza es el canto útil, d , y en compresión, el canto total, h .

8.2.2 Ecuaciones de compatibilidad.

Si en las ecuaciones de compatibilidad deducidas en el apartado 4 dividimos por $1/h$, nos queda:

$$\frac{\varepsilon_{cM}}{\frac{x}{h}} = \frac{\varepsilon_{s2}}{\frac{x-d_2}{h}} = \frac{\varepsilon_{cC}}{\frac{x-\frac{3}{7}h}{h}} = \frac{\varepsilon_{s1}}{\frac{x-d}{h}} \Leftrightarrow \frac{\varepsilon_{cM}}{\xi} = \frac{\varepsilon_{s2}}{\xi-\delta_2} = \frac{\varepsilon_{cC}}{\xi-\frac{3}{7}} = \frac{\varepsilon_{s1}}{\xi-\Delta}$$

ecuaciones que nos permiten determinar las deformaciones de las distintas fibras de la sección en función de la profundidad de la fibra neutra adimensional.



BIBLIOGRAFÍA:

- EHE-08. Instrucción de Hormigón Estructural
- Calavera, J. "Proyecto y Cálculo de Estructuras de Hormigón (en masa, armado y pretensado)". INTEMAC.
- Jiménez Montoya y otros. "Hormigón armado". GG.
- Calavera, J. "Cálculo, construcción patología y rehabilitación de forjados de edificación.". INTEMAC.